

大学数学のアトリエ | 線形代数 第3章 行列式

No.3 余因子展開

この回のゴール

- 小行列と余因子を求められる.
- 余因子展開 (行・列について) を使って行列式を計算できる.
- 行基本変形で 0 を増やしてから展開する, という計算の流れを使える.
- 余因子行列を使って逆行列の公式 $A^{-1} = \frac{1}{\det A} \tilde{A}$ を導き, 使える.

■ 1. 小行列と余因子

定義 1 小行列・余因子

n 次正方行列 $A = (a_{ij})$ から, 第 i 行と第 j 列を取り除いてできる $n-1$ 次正方行列を A_{ij} と書き, A の (i, j) 小行列という. さらに

$$\Delta_{ij} = (-1)^{i+j} \det A_{ij}$$

を A の (i, j) 余因子という.

符号 $(-1)^{i+j}$ の覚え方

左上を + として, 市松模様に + と - が並ぶ.

$$\begin{pmatrix} + & - & + & \cdots \\ - & + & - & \cdots \\ + & - & + & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

例 1

$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ のとき,

$$\Delta_{11} = + \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 2, \quad \Delta_{12} = - \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 1, \quad \Delta_{13} = + \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -1.$$

■ 2. 余因子展開

定理 1 余因子展開

n 次正方行列 $A = (a_{ij})$ について、次が成り立つ.

$$\det A = a_{i1}\Delta_{i1} + a_{i2}\Delta_{i2} + \cdots + a_{in}\Delta_{in} = \sum_{j=1}^n a_{ij}\Delta_{ij} \quad (\text{第 } i \text{ 行に関する展開}),$$

$$\det A = a_{1j}\Delta_{1j} + a_{2j}\Delta_{2j} + \cdots + a_{nj}\Delta_{nj} = \sum_{i=1}^n a_{ij}\Delta_{ij} \quad (\text{第 } j \text{ 列に関する展開}).$$

n 次の行列式を、 $n-1$ 次の行列式いくつかで表す公式である. これをくり返せば、どんな行列式も 2 次の行列式に帰着できる.

例 2

例 1 の A を第 1 行で展開すると

$$\det A = 1 \cdot \Delta_{11} + 1 \cdot \Delta_{12} + 2 \cdot \Delta_{13} = 2 + 1 - 2 = 1.$$

【証明】(第 i 行に関する展開) 3 段階で示す.

ステップ 1: 第 1 行が $(a_{11}, 0, \dots, 0)$ のとき, $\det A = a_{11} \det A_{11}$.

定義の和で, $\sigma(1) \neq 1$ の項は $a_{1\sigma(1)} = 0$ を含むので消える. 残るのは $\sigma(1) = 1$ の項で, そのような σ は $2, \dots, n$ の並べ替えとみなせ, 符号 (転倒数) も変わらない. よって残りの和はちょうど $a_{11} \det A_{11}$ になる.

ステップ 2: 第 i 行が $(0, \dots, 0, a_{ij}, 0, \dots, 0)$ のとき, $\det A = a_{ij}\Delta_{ij}$.

第 i 行を, すぐ上の行との入れ替えを $i-1$ 回くり返して一番上へ移す. 同様に第 j 列を, すぐ左の列との入れ替えを $j-1$ 回くり返して一番左へ移す. このとき他の行・列の順番は変わらないので, 右下に残る部分は A_{ij} のままである. 入れ替えは合計 $(i-1) + (j-1)$ 回なので, No.2 定理 1 (2) (と列についての同じ性質) とステップ 1 より

$$\det A = (-1)^{(i-1)+(j-1)} a_{ij} \det A_{ij} = (-1)^{i+j} a_{ij} \det A_{ij} = a_{ij}\Delta_{ij}.$$

ステップ 3: 一般の場合. 第 i 行を $(a_{i1}, \dots, a_{in}) = (a_{i1}, 0, \dots, 0) + (0, a_{i2}, 0, \dots, 0) + \cdots + (0, \dots, 0, a_{in})$ と分け, No.2 定理 1 (1) (多重線形性) で行列式を n 個の和に分ける. 各項にステップ 2 を使えば $\det A = \sum_j a_{ij}\Delta_{ij}$.

列に関する展開は, $\det {}^t A = \det A$ を使って行の場合に帰着できる. □

■ 3. 計算の工夫：0 を増やしてから展開する

余因子展開は、0 が多い行や列を選ぶと、計算する余因子の数が減る。0 が少なければ、No.2 の変形で 0 を作ってから展開する。

例題 1

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 0 & 1 \\ 4 & 0 & 2 & -1 \end{vmatrix} \text{ を求めよ.}$$

【解答】 第 2 列は (3,2) 成分の 3 以外すべて 0 なので、第 2 列で展開すると項は 1 つだけ。符号は $(-1)^{3+2} = -1$ で、

$$\det A = 3 \cdot (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 2 \\ 4 & 2 & -1 \end{vmatrix} = -3 \cdot 21 = -63.$$

(3 次の行列式はサラスの方法で $2 + 8 + 6 + 12 - 8 + 1 = 21$.)

例題 2 ヴァンデルモンドの行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} = (b-a)(c-a)(c-b) \text{ を示せ.}$$

【解答】 第 3 行から第 2 行の a 倍を引き、次に第 2 行から第 1 行の a 倍を引く (どちらも (III) の変形で、値は変わらない)。

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} \xrightarrow{\text{③}-\text{②} \times a} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ 0 & b^2 - ab & c^2 - ac \end{vmatrix} \xrightarrow{\text{②}-\text{①} \times a} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & b-a & c-a \\ 0 & b(b-a) & c(c-a) \end{vmatrix}.$$

第 1 列で展開すると

$$= 1 \cdot \begin{vmatrix} b-a & c-a \\ b(b-a) & c(c-a) \end{vmatrix} = (b-a)(c-a) \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ b & c \end{vmatrix} = (b-a)(c-a)(c-b).$$

(2 つめの等号では、第 1 列から $b-a$ 、第 2 列から $c-a$ をくくり出した.)

コラム：ヴァンデルモンドの行列式の意味

この行列式が 0 でない $\iff a, b, c$ がすべて異なる。これは「異なる 3 点を通る 2 次関数 $y = p + qx + rx^2$ がただ 1 つに決まる」ことと結びついている。(3 点の条件は p, q, r についての連立方程式になり、その係数行列の転置がこの行列である.)

■ 4. 余因子行列と逆行列

定義 2 余因子行列

n 次正方行列 A の余因子 Δ_{ij} を並べて転置した行列

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} \Delta_{11} & \Delta_{21} & \cdots & \Delta_{n1} \\ \Delta_{12} & \Delta_{22} & \cdots & \Delta_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \Delta_{1n} & \Delta_{2n} & \cdots & \Delta_{nn} \end{pmatrix}$$

を A の余因子行列という. $\tilde{A}$ の (i, j) 成分は Δ_{ji} (添字が逆) である.

定理 2

$$A\tilde{A} = \tilde{A}A = (\det A)E.$$

したがって A が正則 ($\det A \neq 0$) なら,

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \tilde{A}.$$

【証明】 $A\tilde{A}$ の (i, k) 成分は $\sum_{j=1}^n a_{ij}\Delta_{kj}$ である.

$i = k$ のとき: これは第 i 行に関する余因子展開そのものなので $\det A$.

$i \neq k$ のとき: A の第 k 行を第 i 行で置き換えた行列 B を考える. B の第 k 行の余因子は, 第 k 行を取り除いて作るので A の余因子 Δ_{kj} と同じ. よって B を第 k 行で展開すると $\det B = \sum_j a_{ij}\Delta_{kj}$. ところが B は第 i 行と第 k 行が等しいので $\det B = 0$ (No.2 定理 1 (3)).

以上より $A\tilde{A} = (\det A)E$. $\tilde{A}A$ も列に関する展開を使って同様に示せる. □

例 3

2 次の場合, $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ の余因子は $\Delta_{11} = d$, $\Delta_{12} = -c$, $\Delta_{21} = -b$, $\Delta_{22} = a$. 並べて転置すると $\tilde{A} = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$ で, 第 1 章 No.3 の公式 $A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$ が再び得られる.

例題 3

$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ の逆行列を, 余因子行列を用いて求めよ.

【解答】 例 1 で $\Delta_{11} = 2$, $\Delta_{12} = 1$, $\Delta_{13} = -1$. 残りも計算すると

$$\begin{aligned} \Delta_{21} &= -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 0, & \Delta_{22} &= \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 2, & \Delta_{23} &= -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -1, \\ \Delta_{31} &= \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -1, & \Delta_{32} &= -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = -1, & \Delta_{33} &= \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1. \end{aligned}$$

例2より $\det A = 1$. 余因子を**転置して**並べると

$$A^{-1} = \frac{1}{1} \begin{pmatrix} \Delta_{11} & \Delta_{21} & \Delta_{31} \\ \Delta_{12} & \Delta_{22} & \Delta_{32} \\ \Delta_{13} & \Delta_{23} & \Delta_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

第1章 No.4 練習問題4 (1) の結果と一致する.

注意

- いちばん多い間違いは**転置のし忘れ**. $\tilde{A}$ の第1行には $\Delta_{11}, \Delta_{21}, \Delta_{31}$ (第1列の余因子) が並ぶ.
- 3次以上の逆行列を数値で求めるなら, 掃き出し法のほうが計算量は少ない. 余因子行列の公式は「逆行列の各成分が, 元の成分の式としてどう書けるか」を教えてくれる点に価値がある.

■ 練習問題

1. $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 4 & -1 \\ 2 & 1 & 5 \end{pmatrix}$ について, 次に答えよ.

(1) 第1列に関する余因子展開で $\det A$ を求めよ.

(2) 余因子行列 $\tilde{A}$ を求め, A^{-1} を求めよ.

2. 行基本変形で0を増やしてから余因子展開して, 次の行列式を求めよ.

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

3. 次の等式を示せ.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & 0 \\ c_{11} & c_{12} & b_{11} & b_{12} \\ c_{21} & c_{22} & b_{21} & b_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{vmatrix}$$

(ヒント: 第1行で展開する.)

4. A が n 次正方行列のとき, $\det \tilde{A} = (\det A)^{n-1}$ であることを, A が正則な場合について示せ.

5. (考えてみよう) p, q, r を定数とする. $\begin{vmatrix} x & -1 & 0 \\ 0 & x & -1 \\ r & q & x+p \end{vmatrix}$ を第1列で展開して計算せよ. どんな多項式が現れるか.

■ 練習問題の解答

1. (1) 第1列は
- $(1, 0, 2)$
- なので

$$\det A = 1 \cdot \begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} + 2 \cdot (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} = 21 + 2 \cdot (2 - 12) = 1.$$

- (2) 余因子を計算すると

$$\begin{pmatrix} \Delta_{11} & \Delta_{12} & \Delta_{13} \\ \Delta_{21} & \Delta_{22} & \Delta_{23} \\ \Delta_{31} & \Delta_{32} & \Delta_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 21 & -2 & -8 \\ 13 & -1 & -5 \\ -10 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

$$\text{転置して } \tilde{A} = \begin{pmatrix} 21 & 13 & -10 \\ -2 & -1 & 1 \\ -8 & -5 & 4 \end{pmatrix}, \det A = 1 \text{ なので } A^{-1} = \tilde{A}.$$

2. 第2行の1を使って第1列を掃き出す (① - ② × 3, ④ - ② × 2. 値は変わらない).

$$\begin{vmatrix} 0 & -5 & -3 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & -4 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} -5 & -3 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ -4 & -1 & 2 \end{vmatrix} = -5.$$

(3 次の行列式はサラスの方法で $-30 + 12 - 2 + 24 - 5 + 6 = 5$.)

3. 第1行で展開すると, 0 でないのは
- a_{11}
- ,
- a_{12}
- の項だけ.

$$a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & 0 & 0 \\ c_{12} & b_{11} & b_{12} \\ c_{22} & b_{21} & b_{22} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & 0 & 0 \\ c_{11} & b_{11} & b_{12} \\ c_{21} & b_{21} & b_{22} \end{vmatrix}.$$

それぞれの3次の行列式をさらに第1行で展開すると $a_{22} \det B$, $a_{21} \det B$ ($B = (b_{ij})$). よって全体は $(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) \det B = \det A' \det B$ ($A' = (a_{ij})$ の2次の部分).

4. 定理2より
- $A\tilde{A} = (\det A)E$
- . 両辺の行列式をとると, No.2 定理4と練習問題3より
- $\det A \cdot \det \tilde{A} = (\det A)^n \det E = (\det A)^n$
- .
- $\det A \neq 0$
- なので両辺を割って
- $\det \tilde{A} = (\det A)^{n-1}$
- .

5. 第1列は
- $(x, 0, r)$
- なので

$$x \begin{vmatrix} x & -1 \\ q & x+p \end{vmatrix} + r \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ x & -1 \end{vmatrix} = x(x^2 + px + q) + r = x^3 + px^2 + qx + r.$$

係数 p, q, r がそのまま並んだ3次多項式になる. (この行列は, 3次多項式 $x^3 + px^2 + qx + r$ に対応

するコンパニオン行列 $C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -r & -q & -p \end{pmatrix}$ を使って $xE - C$ と書ける. $\det(xE - C)$ は C の固

有多項式 (特性多項式) と呼ばれ, 第6章の固有方程式で再び登場する. つまり, コンパニオン行列の固有多項式は, 元の多項式そのものになる.)